Aufgabe 1 (max. 10 Punkte)

Im Umkleideraum einer Sporthalle stehen Spinde mit den Nummern 1 bis 100. Hundert Schüler mit den Namen 1 bis 100 betreten nacheinander in der Reihenfolge ihrer Namen den Umkleideraum. Der erste Schüler öffnet alle Spinde. Der zweite Schüler schließt alle Spinde mit geraden Nummern wieder. Der dritte Schüler ändert den Zustand aller Spinde mit durch drei teilbaren Nummern, d.h. er schließt Spind 3, öffnet Spind 6 usw. Allgemein gilt: Schüler k ändert den Zustand aller Spinde, deren Nummer ein Vielfaches von k ist.

Frage: Welche Spinde sind offen, nachdem Schüler 100 sein Werk vollendet hat?

Lösung zu Aufgabe 1

Der Zustand von Spind n wird geändert, wenn ein Schüler am Werk ist, dessen Nummer ein Teiler von n ist. Die Anzahl der Zustandsänderungen an Spind n entspricht also der Zahl $T(n) = |\mathcal{T}(n)|$, wobei

$$\mathcal{T}(n) \;=\; \{\, t : t \text{ ist Teiler von } n \text{ und } 1 \leq t \leq n \,\}.$$

Wenn $T(n)$ ungerade ist, steht Spind n am Ende offen, andernfalls ist der Spind geschlossen.

Um $T(n)$ zu bestimmen, betrachten wir die Primzahlzerlegung von n. Sei also $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$. Wir konzentrieren uns auf p_1 und zerlegen $\mathcal{T}(n)$ in die Mengen $A_0, \dots A_{k_1}$, wobei A_i die Menge der Teiler t von n ist, die als $t = p_1^i t'$ mit einem nicht durch p_1 teilbaren t' darstellbar sind. Jeder Teiler von n ist in genau einem A_i und jedes A_i ist genauso groß wie A_0, denn die Abbildung $t' \leftrightarrow p_1^i t'$ ist eine Bijektion. Wir haben also

- $T(n) = |A_0| + \ldots + |A_{k_1}|$ und
- $|A_i| = |A_0|$ für alle $1 \leq i \leq k_1$.

Damit gilt $T(n) = (k_1 + 1)|A_0|$, außerdem ist

$$|A_0| = T(n/p_1^{k_1}) = T(p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}) \; .$$

Daraus folgt mit Induktion, dass

$$T(n) \;=\; (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (k_s + 1).$$

Diese Zahl ist genau dann ungerade, wenn alle k_i gerade sind. Das ist genau dann der Fall, wenn n eine Quadratzahl ist.

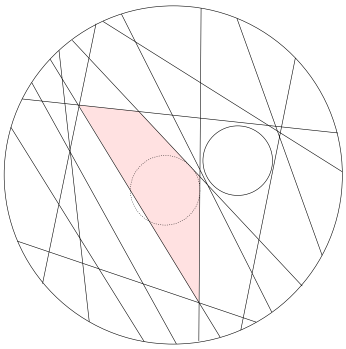
Am Ende stehen also die Spinde mit den Nummern 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 offen. Alle anderen sind geschlossen.

Aufgabe 2 (max. 10 Punkte)

In einen Kreis mit Radius 100 sind 77 Sehnen eingezeichnet. Diese Sehnen zerlegen den Kreis in polygonale Gebiete, die wir Zellen nennen wollen. Beweise die folgenden Aussagen:

(1) Es gibt eine Zelle, deren Fläche zumindest 10 ist.

(2) Es gibt eine Zelle, die einen Kreis vom Radius 1 aufnehmen kann.



Beispiel: Ein Kreis vom Radius 5 mit 13 Sehnen. Grau hervorgehoben ist eine große Zelle, in die der Einheitskreis nicht passt. Wir sehen auch, dass eine andere Zelle den Kreis vom Radius 1 aufnehmen kann.

Lösung zu Aufgabe 2

(1) Die Fläche des Kreises ist $\pi \cdot 100^2 \approx 31415$. Wenn es z Zellen gibt, dann muss mindestens eine Zelle eine Fläche von zumindest $31415/z$ haben. Wir werden zeigen, dass $z \leq 3004$. Daraus folgt die Behauptung.

Sei z_n die maximale Anzahl von Zellen, die mit n Sehnen erzeugt werden kann. Es gilt: $z_0 = 1$ und $z_k = z_{k-1} + k$. Dafür zeichnen wir die Sehnen nacheinander in den Kreis. Die $k$te Sehne kann jede der $k-1$ schon vorhandenen Sehnen schneiden und dadurch k Zellen in je zwei Teile zerlegen. Also ist

$$z_n = 1 + (1 + 2 + \ldots + n) = 1 + \binom{n+1}{2} \quad \text{und} \quad z_{77} = 1 + \frac{78 \cdot 77}{2} = 3004\ .$$

(2) Wir betrachten eine feste Sehnenmenge. Sei Z die Menge aller Punkte im Kreis, die von jeder Sehne und vom Rand mindestens Abstand 1 haben. Jeder Punkt in Z ist Mittelpunkt einer zulässigen Platzierung der Kreisscheibe. Wir wollen zeigen, dass Z nicht leer ist. Die Fläche des Kreises ist $\pi \cdot 100^2$. Entfernen wir die Menge der Punkte, die nicht in Z sind, weil sie zu nahe am Rand sind, dann bleibt ein Kreis K der Fläche $\pi \cdot 99^2$. Zu einer Sehne s definiere den Streifen R_s aller Punkte in K, die Abstand höchstens 1 von s haben. Die Fläche von R_s ist höchstens doppelt so groß wie die Länge von $R_s$und die Länge (in K) ist höchstens $2 \cdot 99$. Also ist die Fläche von R_s höchstens $4 \cdot 99$. Wenn Z leer wäre, dann müssten die Streifen den ganzen Kreis K überdecken. Dafür müsste $77 \cdot 4 \cdot 99 > \pi \cdot 99^2$ gelten, das ist aber falsch. Also kann Z nicht leer sein.

Ergänzung: Mit 99 parallelen Sehnen kann $Z = \emptyset$ erreicht werden (wenn wir auch verbieten, dass der kleine Kreis eine der Sehnen berührt). Geht es mit weniger?

Aufgabe 3 (max. 10 Punkte)

Sei P eine Menge von Punkten in der Ebene, wobei keine drei auf einer Geraden liegen. Außerdem sei S eine Menge von Strecken, deren Endpunkte alle in P liegen, sodass je zwei Strecken aus S entweder einen Endpunkt oder einen inneren Punkt gemeinsam haben. Zeige: $|S| \leq |P|$ (d.h. es gibt zumindest so viele Punkte wie Strecken).

Hinweis: Unterscheide, ob es einen Punkt in P gibt, der Endpunkt von zumindest 3 Strecken ist oder nicht.

Lösung zu Aufgabe 3

Fall 1: Jeder Punkt in P ist Endpunkt von höchstens zwei Strecken.

Sei T die Menge der Paare (p, s) mit $p \in P$, $s \in S$ und p ist einer der beiden Endpunkte von s. Doppeltes Abzählen:

$$\begin{aligned} |T| &= \sum_{p \in P} (\text{Anzahl } s \text{ mit } (p,s) \in T) \leq \sum_{p \in P} 2 = 2|P| \\ |T| &= \sum_{s \in S} (\text{Anzahl } p \text{ mit } (p,s) \in T) = \sum_{s \in S} 2 = 2|S| \end{aligned}$$

Die Ungleichung in der ersten Zeile benutzt die Voraussetzung des Falles. Aus beiden Zeilen zusammen folgt $|S| \leq |P|$.

Fall 2: Es gibt einen Punkt $p \in P$, der Endpunkt von mindestens drei Strecken s_1, s_2, s_3 aus S ist. Seien q_1, q_2, q_3 die anderen Endpunkte dieser Strecken.

Behauptung. Mindestens einer der Endpunkte q_1, q_2, q_3 ist Endpunkt von nur einer Strecke.

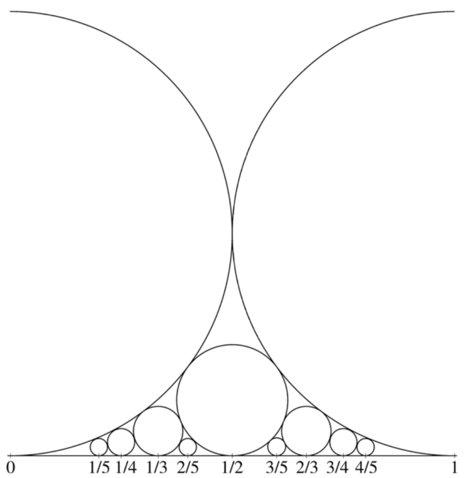
Beweis der Behauptung. Für eine der Strecken, die an p anliegen, o.B.d.A. $s_2 = (p, q_2)$, gilt: Die Punkte q_1 und q_3 liegen auf verschiedenen Seiten der Geraden G durch p und q_2. Da jede von s_2 verschiedene Strecke, die q_2 enthält, nur in eine der beiden von G getrennten Seiten reichen kann, kann so eine Strecke unmöglich sowohl s_1 als auch s_3 schneiden. Also liegt an q_2 nur die eine Strecke s_2 an.

Zusammensetzen. Da die Aussage $|S| \leq |P|$ im Falle $|P| = 3$ gilt, können wir, wenn die Behauptung gezeigt ist, Induktion anwenden. Der Induktionsschritt geht so: Sei $|P| = n$, entweder wir sind in Fall 1 und schließen $|S| \leq |P|$ oder es ist Fall 2. In diesem Fall löschen wir den Punkt, der Endpunkt von nur einer Strecke ist, und die zugehörige Strecke und erhalten Mengen P' und S' für die nach Induktionsvoraussetzung $|S'| \leq |P'|$ gilt. Es folgt

$$|P| = |P'| + 1 \leq |S'| + 1 = |S| . \qquad \square$$

Aufgabe 4 (max. 10 Punkte)

Seien C_0 und C_1 zwei Kreise mit Durchmesser 1, die sich gegenseitig berühren und die x-Achse der reellen Ebene an den Koordinatenwerten 0 und 1 berühren. Wir zeichnen einen Kreis, der sowohl die x-Achse als auch diese beiden Kreise berührt. Für jedes entstehende Paar von sich berührenden Kreisen zeichnen wir einen weiteren Kreis, der beide Kreise und die x-Achse berührt. Die folgende Abbildung zeigt einige der so konstruierten Kreise.



Mit jedem der Kreise assoziieren wir einen Zahlenpaar p, q und schreiben dann $C[p, q]$. Die ersten beiden Kreise sind $C_0 = C[0, 1]$ und $C_1 = C[1, 1]$.

Seien $C[a, b]$ und $C[c, d]$ zwei (schon konstruierte) einander berührende Kreise und C der zwischen ihnen eingefügte kleinere Kreis, der beide berührt. Dann definieren wir $C = C[a + c, b + d]$.

Anmerkung: Die Kreise sind als Ford-Kreise bekannt, normalerweise wird $C[p, q]$ als $C[p/q]$ notiert, d.h. das Paar p, q wird als Bruch p/q aufgefasst. Aus unserer Aufgabe folgt leicht, dass alle Brüche p/q, die zu Ford-Kreisen gehören, gekürzt sind.

Zeige die folgenden Aussagen:

(1) Wenn $C[p, q]$ und $C[r, s]$ einander berühren, dann ist $|\,ps - qr\,| = 1$.

(2) Der Mittelpunkt des Kreises $C[p, q]$ hat die Koordinaten $\left(\dfrac{p}{q}, \dfrac{1}{2q^2}\right)$.

(3) Wenn $C[p, q]$ und $C[r, s]$ zwei Kreise der Familie sind und $|\,ps - qr\,| = 1$ gilt, dann berühren die Kreise einander.

Lösung zu Aufgabe 4

Wir zeigen (1) und (2) mit Induktion. Dabei nehmen wir an, dass die Aussage für alle bisher konstruierten Kreise (Paare von Kreisen) gilt und zeigen, dass sie dann auch für einen weiteren neu konstruierten Kreis gilt.

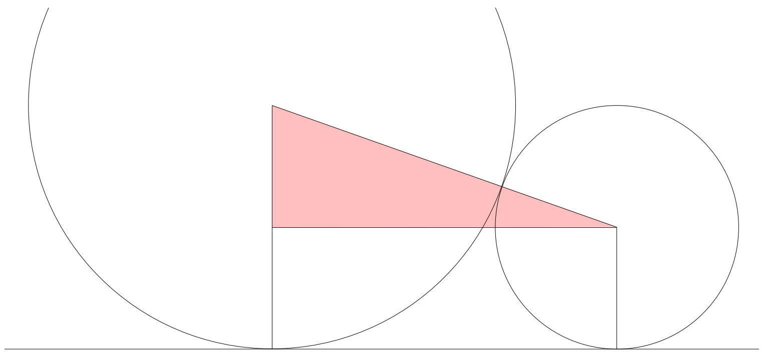
(1) Ein neu konstruierter Kreis berührt immer nur die beiden Kreise, die an seiner Konstruktion beteiligt waren. Sei also $C[p, q]$ das „Kind“ von $C[a, b]$ und $C[c, d]$. Da sich $C[a, b]$ und $C[c, d]$ berühren, gilt nach Induktionsvoraussetzung $|\,ad - bc\,| = 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} aq - bp &= a(b + d) - b(a + c) = ad - bc \qquad \text{und} \\ cq - dp &= c(b + d) - d(a + c) = cb - da = -(ad - bc)\,. \end{aligned}$$

Da sich $C[a,b]$ und $C[c,d]$ berühren, gilt nach Induktionsvoraussetzung $|\,ad-bc\,|=1$.

Damit ist gezeigt, dass $|\,aq-bp\,|=1$ und $|\,cq-dp\,|=1$.

(2) Wir konzentrieren uns wieder auf das Kind von $C[a,b]$ und $C[c,d]$. Sei (x,y) der Mittelpunkt von $C[a+c,b+d]$. Nun betrachten wir das in der Abbildung dargestellte rechtwinklige Dreieck, wobei der linke grosse Kreis $C[a,b]$ und der kleine $C[a+c,b+d]$ repräsentiert.



Indem wir die Induktionsannahme für $C[a,b]$ verwenden, bekommen wir die Seitenlängen α,β,γ des Dreiecks:

$$\alpha=\frac{1}{2b^2}-y\ ,\qquad \beta=x-\frac{a}{b}\quad\text{und}\quad \gamma=\frac{1}{2b^2}+y\ .$$

Aus $\gamma^2-\alpha^2=\beta^2$ (Pythagoras) folgt $\dfrac{2y}{b^2}=\Big(x-\dfrac{a}{b}\Big)^2$. Setzen wir hier $x=\dfrac{a+c}{b+d}$ ein, so erhalten wir nach einer kleinen Rechnung $y=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{ad-bc}{b+d}\Big)^2$. Weil sich $C[a,b]$ und $C[c,d]$ berühren, wissen wir aus (1), dass $|\,ad-bc\,|=1$ gilt, also ist $y=\dfrac{1}{2(b+d)^2}$.

Mit der analogen Rechnung verifizieren wir noch, dass der auf der x-Achse tangential liegende Kreis mit Mittelpunkt $\Big(\dfrac{a+c}{b+d},\dfrac{1}{2(b+c)^2}\Big)$ auch den Kreis $C[c,d]$ berührt. Damit ist der Mittelpunkt von $C[a+c,b+d]$ bestimmt.

(3) Da wir aus (2) Mittelpunkt und Radius der Kreise $C[p,q]$ und $C[r,s]$ kennen, können wir direkt nachrechnen, wann der Abstand der Mittelpunkte der Summe der Radien entspricht. Wir betrachten wieder ein rechtwinkliges Dreieck wie in der Abbildung und erhalten:

$$\alpha=\pm\Big(\frac{1}{2q^2}-\frac{1}{2s^2}\Big)\ ,\qquad \beta=\pm\Big(\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\Big)\quad\text{und}\quad \gamma=\frac{1}{2q^2}+\frac{1}{2s^2}+\rho\ .$$

Hier bezeichnet ρ den Abstand der Kreise. Mit Pythagoras folgt

$$\frac{1}{q^2s^2}+\rho\Big(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{s^2}+\rho\Big)\ =\ \Big(\frac{ps-rq}{qs}\Big)^2\ .$$

Wenn $|\,ps-qr\,|=1$ gilt, dann muss $\rho=0$ gelten, das heißt die Kreise berühren einander.