

Aufgabe 1

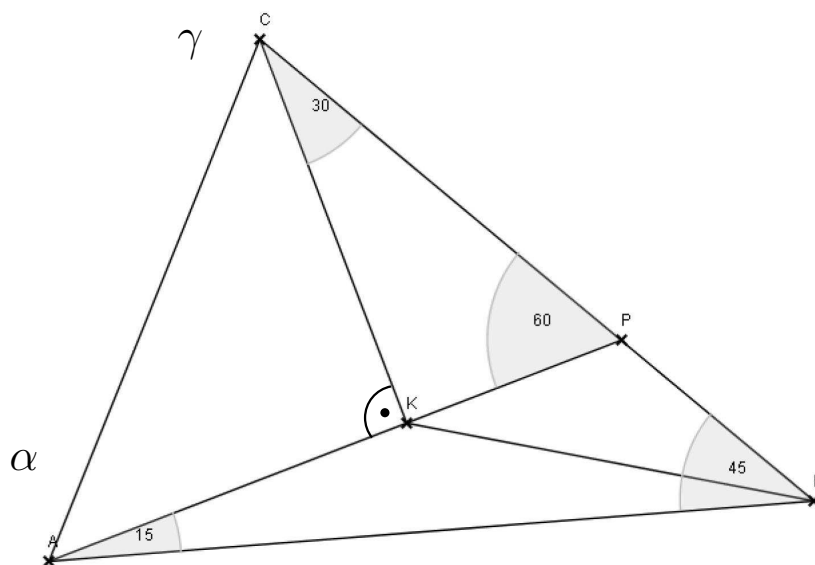
(max. 10 Punkte)

Von einem Dreieck $\triangle ABC$ ist bekannt:

- Der Innenwinkel $\sphericalangle CBA$ beträgt 45° .
- Ein Punkt P liegt auf der Seite \overline{BC} so, dass die Strecke \overline{PB} halb so lang ist wie die Strecke \overline{PC} .
- Der Winkel $\sphericalangle CPA$ beträgt 60° .

Bestimmt mit Hilfe dieser Angaben die Größe der anderen beiden Innenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$.

Tipp: Nützliche Hilfsgrößen sind vielleicht das Lot von C auf \overline{AP} und der Lotfußpunkt K dieses Lotes. Untersucht Dreiecke, in denen K ein Eckpunkt ist.

Lösung zu Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
 \triangle CKP \text{ ist ein „halbes“ gleichseitiges Dreieck} &\Rightarrow \overline{KP} = \overline{PB} \\
 &\Rightarrow \triangle KPB \text{ gleichschenkelig} \\
 &\Rightarrow \sphericalangle PKB = \sphericalangle KBP = 30^\circ \\
 &\Rightarrow \sphericalangle KBA = 15^\circ \\
 &\Rightarrow \triangle AKB \text{ gleichschenkelig} \\
 &\Rightarrow \overline{AK} = \overline{KB} \\
 &\Rightarrow \triangle CKB \text{ gleichschenkelig} \\
 &\Rightarrow \overline{CK} = \overline{KB} \Rightarrow \overline{AK} = \overline{CK} \Rightarrow \triangle AKC \text{ gleichschenkelig} \\
 &\Rightarrow \sphericalangle CAK = \sphericalangle ACK = 45^\circ \\
 &\Rightarrow \alpha = 60^\circ, \gamma = 75^\circ
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(max. 10 Punkte)

Wenn man in den Ausdruck

$$\frac{12 \cdot n + 1}{30 \cdot n + 2}$$

für n eine natürliche Zahl einsetzt, erhält man einen Bruch. Zum Beispiel erhält man für $n = 3$ den Bruch

$$\frac{12 \cdot 3 + 1}{30 \cdot 3 + 2} = \frac{37}{92}.$$

- (a) Gebt den Bruch für $n = 1, 2, 4, 5$ konkret an.
 (b) Zeigt, dass die fünf Brüche für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ jeweils nicht weiter kürzbar sind.
 (c) Beweist, dass der allgemeine Bruch (ganz oben) für *alle* natürlichen Zahlen n nicht weiter kürzbar ist.

Lösung zu Aufgabe 2

- (a) Die gesuchten Brüche sind:

$$\frac{13}{32}, \frac{25}{62}, \frac{49}{122} \text{ und } \frac{61}{152}$$

- (b) Wir beobachten:

$$\frac{13}{32} = \frac{13}{2^5} \quad \frac{25}{62} = \frac{5^2}{2 \cdot 31} \quad \frac{37}{92} = \frac{37}{2^2 \cdot 23} \quad \frac{49}{122} = \frac{7^2}{2 \cdot 61} \quad \frac{61}{152} = \frac{61}{2^3 \cdot 19}.$$

In allen diesen Brüchen sind Zähler und Nenner jeweils teilerfremd, die Brüche also nicht kürzbar.

- (c) Sei p der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $12n + 1$ und $30n + 2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad & 12n + 1 = p \cdot k \\ (2) \quad & 30n + 2 = p \cdot m, \end{aligned}$$

wobei k und m natürliche Zahlen sind.

Multipliziert man die Gleichung (1) mit 5, die Gleichung (2) mit 2 und subtrahiert die modifizierten Gleichungen von einander, bekommt man die folgende Beziehung:

$$(3) \quad 5 \cdot (12n + 1) - 2 \cdot (30n + 2) = 1 = 5p \cdot k - 2p \cdot m = p \cdot (5k - 2m).$$

Da p eine positive ganze Zahl und $5k - 2m$ eine ganze Zahl sind, deren Produkt gleich 1 ist (s. Gleichung (3)), sind die beiden Zahlen gleich 1. D.h. insbesondere, dass der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $12n + 1$ und $30n + 2$ gleich 1 ist und der Bruch deswegen nicht gekürzt werden kann.

Alternative Lösung mit dem Euklidischen Algorithmus $\text{ggT}(m, n) = \text{ggT}(m, n - m)$ falls $n > m$:

$$\begin{aligned} & \text{ggT}(12n + 1, 30n + 2) \\ = & \text{ggT}(12n + 1, 18n + 1) \\ = & \text{ggT}(12n + 1, 6n) \\ = & \text{ggT}(6n + 1, 6n) \\ = & \text{ggT}(1, 6n) \\ = & 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(max. 10 Punkte)

Das Produkt der ersten 11 positiven ganzen Zahlen ist die Zahl

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 39\square 16\square\square\square .$$

Leider sind 4 Ziffern beim Aufschreiben so undeutlich geworden, dass sie hier nur als Kästchen \square erscheinen.

Frage: Könnt ihr durch geschickte Überlegungen die fehlenden Ziffern heraus bekommen?

Begründet Eure Antworten. Die Zahl N einfach auszurechnen zählt nicht.

Tipp: Welche Regeln kennt ihr für die Teilbarkeit von ganzen Zahlen?

Lösung zu Aufgabe 3

Wir beobachten als Erstes, dass N die Faktoren $2 \cdot 5 \cdot 10 = 100$ enthält. Die letzten beiden Ziffern müssen deshalb Nullen sein.

Teilen wir N durch 100, so steht im Ergebnis an der Einerstelle die drittletzte Stelle von N . Wir können sie berechnen, indem wir das Produkt der Reihe nach ausrechnen, aber in jedem Zwischenergebnis nur die letzte Ziffer beachten:

$$\begin{aligned} \frac{N}{100} &= 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11, \\ 3 \cdot 4 &= 12 \quad \rightarrow 1 \text{ streichen, } 2 \text{ bleibt} \\ 2 \cdot 6 &= 12 \quad \rightarrow 1 \text{ streichen, } 2 \text{ bleibt} \\ 2 \cdot 7 &= 14 \quad \rightarrow 1 \text{ streichen, } 4 \text{ bleibt} \\ 4 \cdot 8 &= 32 \quad \rightarrow 3 \text{ streichen, } 2 \text{ bleibt} \\ 2 \cdot 9 &= 18 \quad \rightarrow 1 \text{ streichen, } 8 \text{ bleibt} \\ 8 \cdot 11 &= 88 \quad \rightarrow 8 \text{ streichen, } 8 \text{ bleibt.} \end{aligned}$$

Die gesuchte drittletzte Ziffer ist also eine 8.

Die dritte Ziffer von N — nennen wir sie x — können wir bekommen, weil $N/100$ durch 9 teilbar ist. Weil dann auch die Quersumme

$$3 + 9 + x + 1 + 6 + 8 + 0 + 0 = 27 + x$$

durch 9 teilbar sein muss, schließen wir: $x = 0$ oder $x = 9$. Diese Entscheidung können wir treffen, indem wir beides einmal einsetzen und probieren, ob das Ergebnis durch 7 teilbar ist:

$$\begin{aligned} 39016800 \div 7 &= 55738 \text{ Rest } 2 \quad \rightarrow \text{nein} \\ 39916800 \div 7 &= 57024 \text{ Rest } 0 \quad \rightarrow \text{ja.} \end{aligned}$$

Die dritte Ziffer ist also eine 9.

Ergebnis: $N = 39916800$.

Aufgabe 4

(max. 10 Punkte)

Vier Ehepaare sind bei einem fünften zu Gast. Beim Eintreffen findet ein allgemeines Händeschütteln statt, bei dem folgendes gilt:

- Niemand gibt sich selbst die Hand.
- Niemand gibt seinem Ehepartner die Hand.
- Niemand gibt jemand anderem mehr als einmal die Hand.

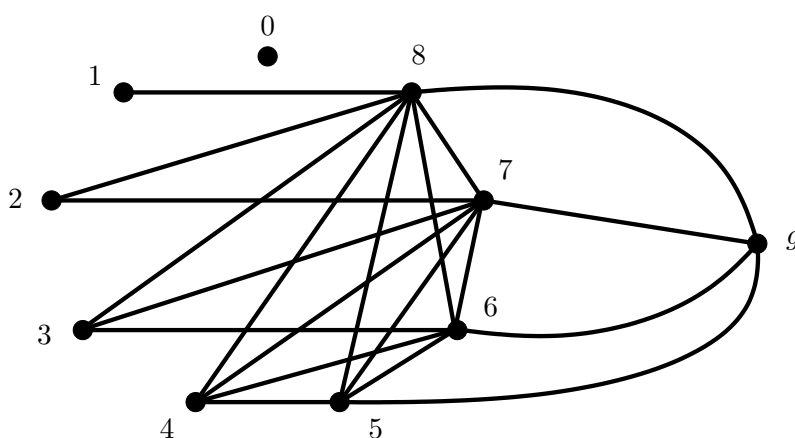
Nach dem Händeschütteln fragt der Gastgeber die anderen 9 Personen, wie oft sie insgesamt anderen die Hand gegeben haben. Von jeder Person bekommt er eine andere Zahl zur Antwort.

Frage: Welche Zahl antwortet ihm seine Frau?

Lösung zu Aufgabe 4

Die 10 Personen stellen wir dar als Punkte. Wenn zwei einander die Hand geschüttelt haben, verbinden wir diese beiden durch eine Linie. Da niemand seinem/r Ehepartner/in die Hand gegeben hat, können höchstens 8 Linien in jeden Punkt hinein laufen.

Da weiter alle Personen außer dem Gastgeber verschieden vielen anderen die Hand geschüttelt haben, müssen die Anzahlen einlaufender Linien in diese 9 Punkte genau die Zahlen $0, \dots, 8$ sein. Wir bezeichnen die Punkte der Einfachheit halber mit diesen Zahlen und dazu den Gastgeber g .



Warum muß die Zeichnung im Prinzip — also bei freier Verschiebbarkeit der Punkte — so aussehen?

- Punkt 0 ist mit keinem anderen verbunden.
- Punkt 8 ist nicht mit 0 verbunden, muss es also mit allen restlichen 8 Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, g sein.

- Punkt 1 ist mit 8 verbunden, hat also keinen weiteren Partner.
- Punkt 7 ist nicht mit 0 oder 1 verbunden, muss es also mit allen restlichen 7 Punkten 2, 3, 4, 5, 6, 8, g sein.
- Punkt 2 ist mit 7 und 8 verbunden, hat also keine weiteren Partner.
- Punkt 6 ist nicht mit 0, 1 oder 2 verbunden, muss es also mit allen restlichen 6 Punkten 3, 4, 5, 7, 8, g sein.
- Punkt 3 ist mit 6, 7 und 8 verbunden, hat also keine weiteren Partner.
- Punkt 5 ist nicht mit 0, 1, 2 oder 3 verbunden, muss es also mit allen restlichen 5 Punkten 4, 6, 7, 8, g sein.
- Punkt 4 ist mit 5, 6, 7 und 8 verbunden, hat also keine weiteren Partner.
- Der Gastgeber g ist demnach mit den 4 Punkten 5, 6, 7, 8 verbunden.

Diese Punkte 5, 6, 7, 8 können nach den Regeln nicht die Frau des Gastgebers darstellen. Aber welcher der Punkte 0, 1, 2, 3, 4 ist sie?

- Da 8 mit allen außer 0 verbunden ist, müssen diese beiden Ehepartner sein.
- Da 7 nur mit 0 und 1 nicht verbunden ist, kommen nur diese beiden als Ehepartner in Frage. Also muss es 1 sein, da 0 vergeben ist.
- Da 6 nur mit 0, 1, 2 nicht verbunden ist, muss sein (oder ihr) Ehepartner unter diesen sein. Also ist es 2, da 0 und 1 vergeben sind.
- Analog sind 5 und 3 Ehepartner.

Es bleiben nur g und 4 übrig.

Ergebnis: Die Frau des Gastgebers antwortet: „4“.