Aufgabe 1 (max. 10 Punkte)

Von einem Dreieck $\triangle ABC$ ist bekannt:

(a) Der Innenwinkel $\sphericalangle CBA$ beträgt 45°.

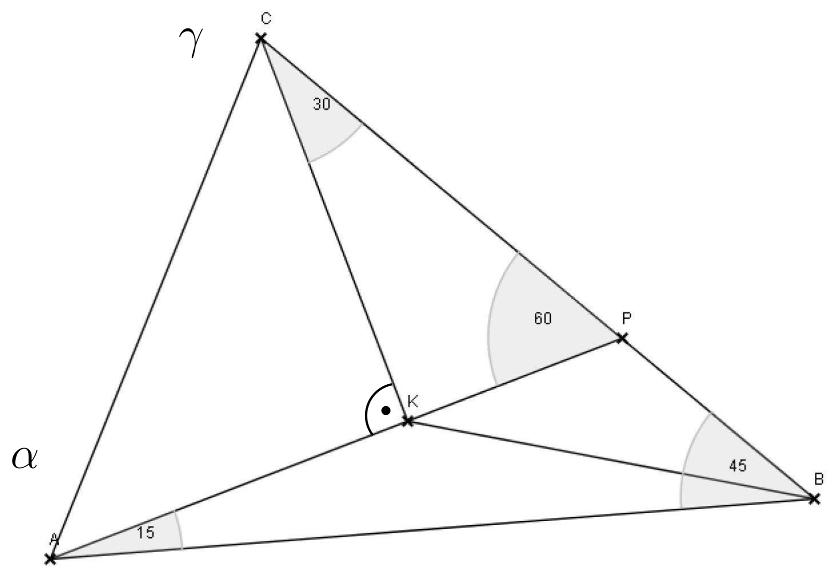
(b) Ein Punkt P liegt auf der Seite $\overline{BC}$ so, dass die Strecke $\overline{PB}$ halb so lang ist wie die Strecke $\overline{PC}$.

(c) Der Winkel $\sphericalangle CPA$ beträgt 60°.

Bestimmt mit Hilfe dieser Angaben die Größe der anderen beiden Innenwinkel des Dreiecks $\triangle ABC$.

Tipp: Nützliche Hilfsgrößen sind vielleicht das Lot von C auf $\overline{AP}$ und der Lotfußpunkt K dieses Lotes. Untersucht Dreiecke, in denen K ein Eckpunkt ist.

Lösung zu Aufgabe 1



Δ CKP ist ein „halbes" gleichseitiges Dreieck $\Rightarrow \quad \overline{KP} = \overline{PB}$

$\Rightarrow \Delta KPB$ *gleichschenklig*

$\Rightarrow \angle PKB = \angle KBP = 30^\circ$

$\Rightarrow \angle KBA = 15^\circ$

$\Rightarrow \Delta AKB$ *gleichschenklig*

$\Rightarrow \overline{AK} = \overline{KB}$

$\Rightarrow \Delta CKB$ *gleichschenklig*

$\Rightarrow \overline{CK} = \overline{KB} \quad \Rightarrow \quad \overline{AK} = \overline{CK} \quad \Rightarrow \quad \Delta AKC$ *gleichschenklig*

$\Rightarrow \angle CAK = \angle ACK = 45^\circ$

$\Rightarrow \alpha = 60^\circ, \gamma = 75^\circ$

Aufgabe 2 (max. 10 Punkte)

Wenn man in den Ausdruck

$$\frac{12 \cdot n + 1}{30 \cdot n + 2}$$

für n eine natürliche Zahl einsetzt, erhält man einen Bruch. Zum Beispiel erhält man für $n = 3$ den Bruch

$$\frac{12 \cdot 3 + 1}{30 \cdot 3 + 2} = \frac{37}{92} .$$

(a) Gebt den Bruch für $n = 1, 2, 4, 5$ konkret an.

(b) Zeigt, dass die fünf Brüche für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ jeweils nicht weiter kürzbar sind.

(c) Beweist, dass der allgemeine Bruch (ganz oben) für *alle* natürlichen Zahlen n nicht weiter kürzbar ist.

Lösung zu Aufgabe 2

(a) Die gesuchten Brüche sind:

$$\frac{13}{32}, \frac{25}{62}, \frac{49}{122} \text{ und } \frac{61}{152}$$

(b) Wir beobachten:

$$\frac{13}{32} = \frac{13}{2^5} \qquad \frac{25}{62} = \frac{5^2}{2 \cdot 31} \qquad \frac{37}{92} = \frac{37}{2^2 \cdot 23} \qquad \frac{49}{122} = \frac{7^2}{2 \cdot 61} \qquad \frac{61}{152} = \frac{61}{2^3 \cdot 19} .$$

In allen diesen Brüchen sind Zähler und Nenner jeweils teilerfremd, die Brüche also nicht kürzbar.

(c) Sei p der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $12n + 1$ und $30n + 2$. Dann gilt:

(1) $$12n + 1 = p \cdot k$$

(2) $$30n + 2 = p \cdot m ,$$

wobei k und m natürliche Zahlen sind.

Multipliziert man die Gleichung (1) mit 5, die Gleichung (2) mit 2 und subtrahiert die modifizierten Gleichungen von einander, bekommt man die folgende Beziehung:

(3) $$5 \cdot (12n + 1) - 2 \cdot (30n + 2) = 1 = 5p \cdot k - 2p \cdot m = p \cdot (5k - 2m) .$$

Da p eine positive ganze Zahl und $5k - 2m$ eine ganze Zahl sind, deren Produkt gleich 1 ist (s. Gleichung (3)), sind die beiden Zahlen gleich 1. D.h. insbesondere, dass der größte gemeinsame Teiler der Zahlen $12n + 1$ und $30n + 2$ gleich 1 ist und der Bruch deswegen nicht gekürzt werden kann.

Alternative Lösung mit dem Euklidischen Algorithmus $\operatorname{ggT}(m,n) = \operatorname{ggT}(m, n-m)$ falls $n > m$:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{ggT}(12n+1, 30n+2) \\
= \; & \operatorname{ggT}(12n+1, 18n+1) \\
= \; & \operatorname{ggT}(12n+1, 6n) \\
= \; & \operatorname{ggT}(6n+1, 6n) \\
= \; & \operatorname{ggT}(1, 6n) \\
= \; & 1 \, .
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (max. 10 Punkte)

Das Produkt der ersten 11 positiven ganzen Zahlen ist die Zahl

$$N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 39\square 16\square\square\square\ .$$

Leider sind 4 Ziffern beim Aufschreiben so undeutlich geworden, dass sie hier nur als Kästchen $\square$ erscheinen.

Frage: Könnt ihr durch geschickte Überlegungen die fehlenden Ziffern heraus bekommen?

Begründet Eure Antworten. Die Zahl N einfach auszurechnen zählt nicht.

Tipp: Welche Regeln kennt ihr für die Teilbarkeit von ganzen Zahlen?

Lösung zu Aufgabe 3

Wir beobachten als Erstes, dass N die Faktoren $2 \cdot 5 \cdot 10 = 100$ enthält. Die letzten beiden Ziffern müssen deshalb Nullen sein.

Teilen wir N durch 100, so steht im Ergebnis an der Einerstelle die drittletzte Stelle von N. Wir können sie berechnen, indem wir das Produkt der Reihe nach ausrechnen, aber in jedem Zwischenergebnis nur die letzte Ziffer beachten:

$$\begin{aligned}
\frac{N}{100} &= 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 11\ , \\
3 \cdot 4 &= 12 \quad \rightarrow \text{1 streichen, 2 bleibt} \\
2 \cdot 6 &= 12 \quad \rightarrow \text{1 streichen, 2 bleibt} \\
2 \cdot 7 &= 14 \quad \rightarrow \text{1 streichen, 4 bleibt} \\
4 \cdot 8 &= 32 \quad \rightarrow \text{3 streichen, 2 bleibt} \\
2 \cdot 9 &= 18 \quad \rightarrow \text{1 streichen, 8 bleibt} \\
8 \cdot 11 &= 88 \quad \rightarrow \text{8 streichen, 8 bleibt.}
\end{aligned}$$

Die gesuchte drittletzte Ziffer ist also eine 8.

Die dritte Ziffer von N — nennen wir sie x — können wir bekommen, weil $N/100$ durch 9 teilbar ist. Weil dann auch die Quersumme

$$3 + 9 + x + 1 + 6 + 8 + 0 + 0 = 27 + x$$

durch 9 teilbar sein muss, schließen wir: $x = 0$ oder $x = 9$. Diese Entscheidung können wir treffen, indem wir beides einmal einsetzen und probieren, ob das Ergebnis durch 7 teilbar ist:

$$\begin{aligned}
39\mathbf{0}16800 \div 7 &= 55738 \text{ Rest } 2 \quad \rightarrow \text{nein} \\
39\mathbf{9}16800 \div 7 &= 57024 \text{ Rest } 0 \quad \rightarrow \text{ja.}
\end{aligned}$$

Die dritte Ziffer ist also eine 9.

Ergebnis: $N = 39916800$.

Aufgabe 4 (max. 10 Punkte)

Vier Ehepaare sind bei einem fünften zu Gast. Beim Eintreffen findet ein allgemeines Händeschütteln statt, bei dem folgendes gilt:

(a) Niemand gibt sich selbst die Hand.

(b) Niemand gibt seinem Ehepartner die Hand.

(c) Niemand gibt jemand anderem mehr als einmal die Hand.

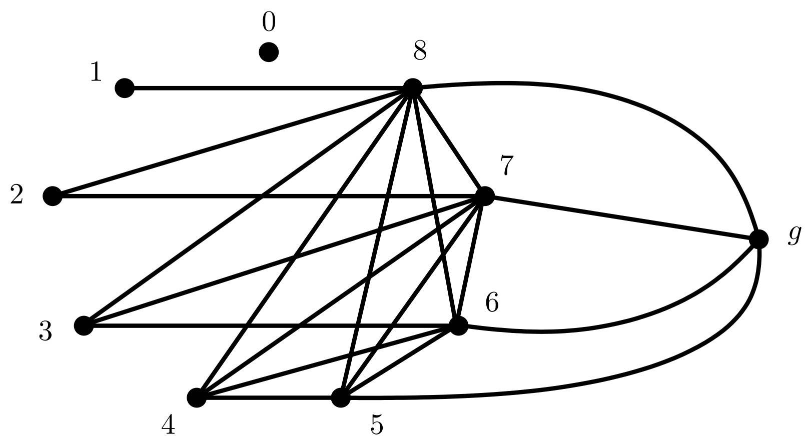
Nach dem Händeschütteln fragt der Gastgeber die anderen 9 Personen, wie oft sie insgesamt anderen die Hand gegeben haben. Von jeder Person bekommt er eine andere Zahl zur Antwort.

Frage: Welche Zahl antwortet ihm seine Frau?

Lösung zu Aufgabe 4

Die 10 Personen stellen wir dar als Punkte. Wenn zwei einander die Hand geschüttelt haben, verbinden wir diese beiden durch eine Linie. Da niemand seinem/r Ehepartner/in die Hand gegeben hat, können höchstens 8 Linien in jeden Punkt hinein laufen.

Da weiter alle Personen außer dem Gastgeber verschieden vielen anderen die Hand geschüttelt haben, müssen die Anzahlen einlaufender Linien in diese 9 Punkte genau die Zahlen 0,. . . ,8 sein. Wir bezeichnen die Punkte der Einfachheit halber mit diesen Zahlen und dazu den Gastgeber g.



Warum muß die Zeichnung im Prinzip — also bei freier Verschiebbarkeit der Punkte — so aussehen?

- Punkt 0 ist mit keinem anderen verbunden.
- Punkt 8 ist nicht mit 0 verbunden, muss es also mit allen restlichen 8 Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, g sein.

- Punkt 1 ist mit 8 verbunden, hat also keinen weiteren Partner.
- Punkt 7 ist nicht mit 0 oder 1 verbunden, muss es also mit allen restlichen 7 Punkten 2, 3, 4, 5, 6, 8, g sein.
- Punkt 2 ist mit 7 und 8 verbunden, hat also keine weiteren Partner.
- Punkt 6 ist nicht mit 0, 1 oder 2 verbunden, muss es also mit allen restlichen 6 Punkten 3, 4, 5, 7, 8, g sein.
- Punkt 3 ist mit 6, 7 und 8 verbunden, hat also keine weiteren Partner.
- Punkt 5 ist nicht mit 0, 1, 2 oder 3 verbunden, muss es also mit allen restlichen 5 Punkten 4, 6, 7, 8, g sein.
- Punkt 4 ist mit 5, 6, 7 und 8 verbunden, hat also keine weiteren Partner.
- Der Gastgeber g ist demnach mit den 4 Punkten 5, 6, 7, 8 verbunden.

Diese Punkte 5, 6, 7, 8 können nach den Regeln nicht die Frau des Gastgebers darstellen. Aber welcher der Punkte 0, 1, 2, 3, 4 ist sie?

- Da 8 mit allen außer 0 verbunden ist, müssen diese beiden Ehepartner sein.
- Da 7 nur mit 0 und 1 nicht verbunden ist, kommen nur diese beiden als Ehepartner in Frage. Also muss es 1 sein, da 0 vergeben ist.
- Da 6 nur mit 0, 1, 2 nicht verbunden ist, muss sein (oder ihr) Ehepartner unter diesen sein. Also ist es 2, da 0 und 1 vergeben sind.
- Analog sind 5 und 3 Ehepartner.

Es bleiben nur g und 4 übrig.

Ergebnis: Die Frau des Gastgebers antwortet: **„4“**.