Musterlösung zu Aufgabe 1 (Klassenstufe 9/10)

Aufgabe. Drei Freunde spielen mehrere Runden eines Spiels, bei dem sie je nach Rundenplatzierung in jeder Runde einen festen, ganzzahligen Betrag x, y oder z ausgezahlt bekommen. Die ausgezahlten Beträge sind paarweise verschieden und jeder Spieler erhält mindestens einen Euro. Am Ende haben die drei Freunde 20, 10 bzw. 9 Euro in Ihren Taschen.

A) Wie viele Runden wurden gespielt?

B) Welche Beträge wurden an den Erst-, Zweit- und Drittplatzierten in jeder Runde ausgezahlt?

Lösung zu Aufgabe 1.

A) Wir bezeichnen mit n die Anzahl der gespielten Runden. Der Gesamtgewinn in Euro beträgt nach n Runden also

$$n(x+y+z) = 39 \quad (= 20 + 10 + 9)\,.$$

bzw.

$$x + y + z = \frac{39}{n}\,,$$

wobei $x+y+z$ eine ganze Zahl ist. Die Teiler von 39 sind $1, 3, 13$ und 39. Da nach Voraussetzung mehrere Runden gespielt wurden, scheidet $n = 1$ aus. Für $n = 39$, muss $x+y+z = 1$ sein, im Widerspruch zur Annahme, dass $x, y, z > 0$ ganzzahlig und paarweise verschieden sind; aus dem gleichen Grund scheidet $n = 13$ aus. Also wurden $n = 3$ Runden gespielt.

B) Für $n = 3$ ist $x + y + z = 13$. Wir nehmen an, dass $x > y > z$ ist. Da einer der Freunde 20 Euro gewonnen hat und 3 Runden gespielt wurden, muss $x \geq 7$ sein. Da $x, y, z \geq 1$ paarweise verschieden sind, bleiben also nur die folgenden 4 Möglichkeiten, um x, y, z auf den Gesamt-Rundengewinn aufzuteilen:

$$\begin{aligned} 10 + 2 + 1 &= 13 \\ 8 + 4 + 1 &= 13 \\ 8 + 3 + 2 &= 13 \\ 7 + 4 + 2 &= 13\,. \end{aligned}$$

Die erste Möglichkeit scheidet aus, da es nicht möglich ist, mit 1 bzw. 2 Euro Rundengewinn nach 3 Runden auf 9 Euro zu kommen. Gegen die dritte Zerlegung spricht, dass die 9 Euro nur mit 3×3 Euro erreicht werden können, es dann aber nicht mehr möglich ist, auf 10 Euro zu kommen. Variante Nr. 4 kann analog ausgeschlossen werden. Übrig bleibt $x = 8$, $y = 4$ und $z = 1$, denn mit

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 4 &= 9 \\ 8 + 1 + 1 &= 10 \\ 4 + 8 + 8 &= 20 \end{aligned}$$

existiert eine erlaubte Gewinnkombination.

Musterlösung zu Aufgabe 2 (Klassenstufe 9/10)

Aufgabe. 25 Personen sitzen im Kreis und stimmen jede Stunde für oder gegen einen Antrag. Jede Person ändert ihre Stimme genau dann, wenn ihre beiden Nachbarn bei der vorherigen Abstimmung anders als sie selbst gestimmt haben.

Beispiel: Wenn beide Nachbarn einer Person zuletzt mit "ja" gestimmt haben, die Person selbst aber mit "nein", dann stimmt sie jetzt auch mit "ja"; hat ein Nachbar mit "ja" gestimmt, der andere mit "nein", so bleibt die Person bei ihrem "nein".

A) Zeige, dass nach einer Weile niemand mehr seine Stimme ändert.

B) Stimmt die Aussage aus A) auch dann, wenn es sich um 24 Personen handelt? Begründe Deine Antwort!

Lösung zu Aufgabe 2. Wir stellen die 25 Personen als Knoten in einem Graphen G dar. Zwei Personen werden durch eine Kante verbunden, wenn sie benachbart sind. Wir färben diejenigen Knoten, die in der aktuellen Abstimmung mit ja stimmen, weiß und die anderen Knoten schwarz.

A) Wir stellen zwei Lösungsvarianten vor:

Variante 1: Wir färben Kanten zwischen gleichfarbigen Knoten rot (d.h. rote Kanten verlaufen zwischen Nachbarn, die beide gleich abstimmen). Sei A_n die Anzahl der roten Kanten in der n-ten Abstimmung. Wir machen jetzt folgende Beobachtung: Wenn eine Person P in der $(n+1)$-ten Abstimmung ihre Stimme ändert, dann war in der n-ten Abstimmung keine der beiden von P ausgehenden Kanten rot. In der $(n+1)$-ten Abstimmung ist dies nur dann weiterhin der Fall, wenn beide Nachbarn von P auch ihre Stimme geändert haben. Also ist $A_{n+1} \geq A_n$, und $A_{n+1} > A_n$ falls es mindestens ein Paar (P_1, P_2) benachbarter Knoten gibt, so dass P_1 seine Stimme ändert und P_2 seine Stimme nicht ändert. Da $A_n \leq 25$ ist, muss es ein $m \in \mathbb{N}$ geben, so dass $A_{m+1} = A_m$. Folglich gibt es dann kein Paar (P_1, P_2) benachbarter Knoten, so dass P_1 nach der m-ten Abstimmung seine Stimme ändert und P_2 seine Stimme nicht ändert. Da G zusammenhängend ist, müssen also nach der m-ten Abstimmung entweder alle Knoten ihre Stimme ändern oder kein Knoten, in letzterem Fall sind wir fertig. Der erste Fall kann nicht eintreten, denn es gibt immer mindestens zwei Personen, die ihre Stimme nicht ändern, denn da die Anzahl der Personen ungerade ist, sind zu Beginn zwei benachbarte Knoten in G entweder beide weiß oder beide schwarz gefärbt. Diese beiden Personen ändern ihre Stimme in der folgenden und (per Induktion) auch in allen weiteren Abstimmungen nicht.

Variante 2: Wie schon in Variante 1 stellen wir die Personen durch einen Graphen G dar und stellen fest, dass es zu Beginn zwei benachbarte Knoten gibt, die entweder beide mit ja oder beide mit nein stimmen und folglich ihre Stimme

niemals ändern. Wir färben jetzt diese beiden Knoten rot. Für alle anderen Knoten gilt folgende Regel: Wenn ein Knoten P zu einem roten Knoten benachbart ist und in der $(n+1)$-ten Abstimmung seine Stimme gegenüber der n-ten Abstimmung nicht ändert, dann wird P in der $(n+1)$-ten Abstimmung rot gefärbt. Wir zeigen nun, dass rote Knoten ihre Stimme niemals ändern: Angenommen, alle Knoten, die in der n-ten Abstimmung rot sind, ändern ihre Stimme nicht, und P wird in der $(n+1)$-ten Abstimmung rot markiert. Dann hat P seine Stimme entweder nicht geändert, weil P mit seinem roten Nachbarn übereinstimmt, oder weil P mit seinem anderen Nachbarn übereinstimmt. In beiden Fällen hat P mindestens einen Nachbarn, der mit P übereinstimmt und wird folglich seine Stimme niemals ändern. Per Induktion folgt nun, dass kein roter Knoten jemals seine Stimme ändert.
Sei nun r_n die Anzahl der roten Knoten in der n-ten Abstimmung. Offenbar ist $r_{n+1} \geq r_n$. Wir zeigen, dass r_n streng monoton steigt, solange es noch Knoten gibt, die nicht rot sind: Dazu sei P ein Knoten, der in der n-ten Abstimmung nicht rot ist, aber zu einem roten Knoten R benachbart ist. Nach der Regel wird P nur dann nicht rot gefärbt, wenn P seine Stimme ändert. Dies kann nur dann passieren, wenn P und R nicht übereinstimmen. Da R seine Stimme aber nicht ändert, stimmen P und R dann in der $(n+1)$-ten Abstimmung überein, und P wird rot gefärbt. Es sind also irgendwann alle Knoten rot gefärbt.

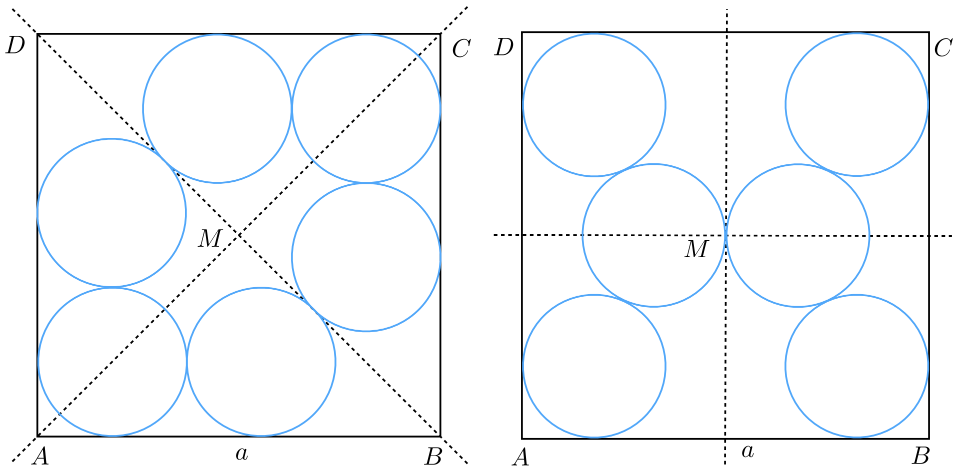
B) Platziert man die 24 Personen so, dass jeder zwei Nachbarn hat, die beim letzten Mal anders als die Person selbst abgestimmt haben, so ändert jede Person bei jeder erneuten Abstimmung ihre Meinung. Das entspricht einem Graphen, dessen Knoten abwechselnd weiß und schwarz sind, wobei die Anzahl der schwarzen und weißen Knoten gleich ist. (Die Gesamtzahl der Knoten ist gerade).

Musterlösung zu Aufgabe 3 (Klassenstufe 9/10)

Aufgabe. Sophie und Emre versuchen, in ein Quadrat mit vorgegebener Seitenlänge a sechs gleich große Kreise so einzuzeichnen, dass sie möglichst groß sind, sich aber nicht gegenseitig schneiden. Sophie zeichnet die Kreise so wie in Abbildung (a), Emre so wie in Abbildung (b).

A) Gib das Verhältnis der Kreisradien zur Seitenlänge a in beiden Fällen an.

B) Wer hat die größeren Kreise gezeichnet? Begründe Deine Antwort!



(a) (b)

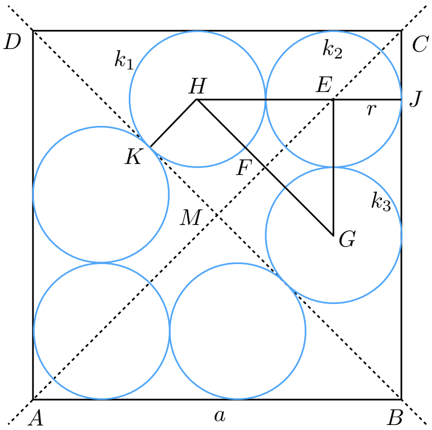
Lösung zu Aufgabe 3.

A) Wir führen einige Bezeichnungen ein; siehe dazu Abb. (c) und (d), a ist die Seitenlänge des Quadrates, r der Radius der Kreise. In der Zeichnung von Sophie seien H, E, G die Mittelpunkte der Kreise k_1, k_2 und k_3. K ist der Berührpunkt von k_1 mit $\overline{BD}$ und J ist der Berührpunkt von k_2 mit $\overline{CD}$. F ist der Schnittpunkt von $\overline{AC}$ und $\overline{GH}$. Dann ergibt sich: Das Dreieck EJC ist gleichschenklig-rechtwinklig mit Kathetenlänge r. Die Dreiecke EFG und EFH sind gleichschenklig-rechtwinklig mit Hypothenusenlänge $2r$. Außerdem ist $\overline{FM} = r$. Damit folgt

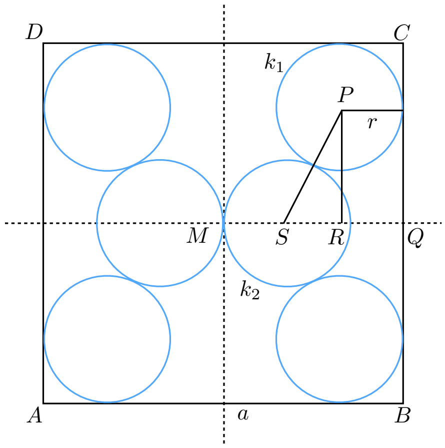
$$\frac{\sqrt{2}}{2}a = |\overline{CM}| = |\overline{CE}| + |\overline{EF}| + |\overline{FM}| = r \cdot \sqrt{2} + r \cdot \sqrt{2} + r.$$

Das ergibt

$$r = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot (2\sqrt{2} + 1)} = \frac{a}{4 + \sqrt{2}} = \frac{a}{14}\left(4 - \sqrt{2}\right).$$



(c)



(d)

In der Zeichnung von Emre seien P und S die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2. Der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ sei Q, und das Lot von P auf $\overline{MQ}$ habe den Fußpunkt R. Dann ist $\left|\overline{MS}\right| = \left|\overline{RQ}\right| = r$, $\left|\overline{PS}\right| = 2r$ und $\left|\overline{PR}\right| = \frac{a}{2} - r$. Wir wenden den Satz des Pythagoras auf das Dreieck SRP an:

$$\left(\frac{a}{2} - 2r\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - r\right)^2 = 4r^2.$$

Umstellen nach r gibt die quadratische Gleichung

$$r^2 - 3ar + \frac{1}{2}a^2 = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$r_{1/2} = \frac{a}{2}\left(3 \pm \sqrt{7}\right),$$

von denen wegen $r_1 = \frac{a}{2}\left(3 + \sqrt{7}\right) > a$ aber nur r_2 in Betracht kommt.

B) Wir behaupten, dass Sophie die größeren Kreise gezeichnet hat. Dazu müssen wir beweisen, dass gilt:

$$\frac{a}{14}\left(4 - \sqrt{2}\right) > \frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{7}\right). \tag{1}$$

Letzteres folgt der Reihe nach aus den Umformungen

$$\begin{aligned} 4 - \sqrt{2} > 7 \cdot \left(3 - \sqrt{7}\right) &\Leftrightarrow 7\sqrt{7} > 17 + \sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 343 > 289 + 34\sqrt{2} + 2 \\ &\Leftrightarrow 26 > 17\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow 676 > 578, \end{aligned} \tag{2}$$

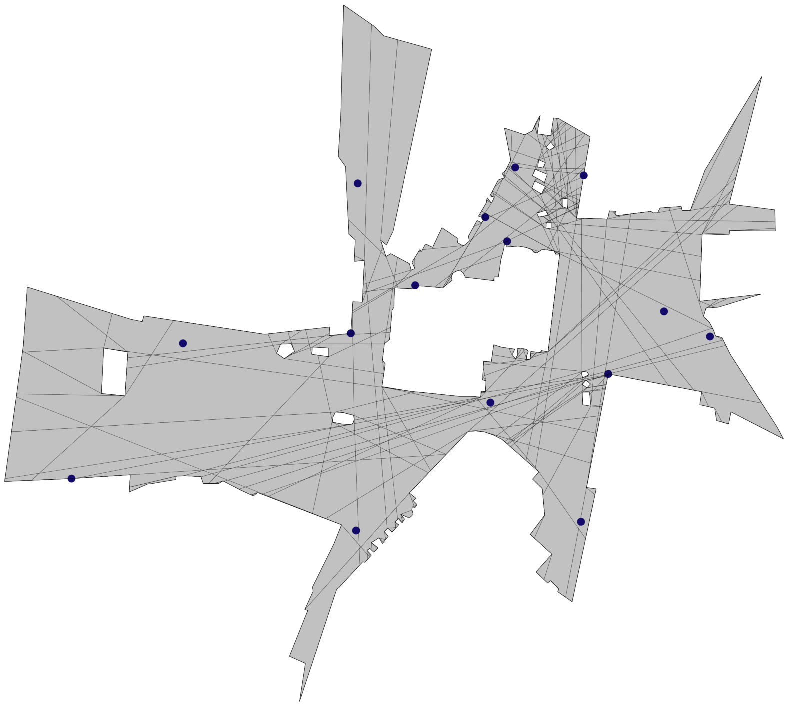
und die letzte Ungleichung stimmt. Also hat Sophie die größeren Kreise gezeichnet.

Bemerkungen:

- Dass (1) aus (2) folgt, kann auch indirekt gezeigt werden, indem von der Negation von (1) auf die falsche Implikation $676 < 578$ geschlossen wird.
- Man kann (1) auch unter Benutzung von Näherungswerten beweisen. In diesem Fall sollten die zum Beweis führenden *Ungleichungen* ersichtlich gemacht werden, z.B.: Wegen $1.48^2 = 2.1904 > 2$ ist $\sqrt{2} < 1.48$ usw. usf.

Musterlösung zu Aufgabe 4 (Klassenstufe 9/10)

Aufgabe. Gegeben sei eine polygonale Fläche A, deren Rand den Grundriss eines Museums darstellt. Anhand des Grundrisses soll entschieden werden, wie viele Museumswärter nötig sind, um das gesamte Museum zu bewachen (siehe untenstehende Abbildung). Dazu werden möglichst wenige Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_k \in A$ („Wärter“) so verteilt, dass jeder Punkt in A durch eine Gerade, die ganz in A liegt (einschließlich Rand), mit einem Wärter verbunden werden kann.



Beispiel: Optimale Lösung des Museumswärterproblems für das Außengelände des Bremer Rathauses. Die “Wärter” sind Kameras, die an den blaue Punkten platziert werden (Quelle: Institut für Betriebssysteme und Rechnerverbund, TU Braunschweig).

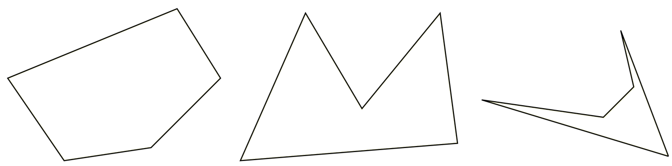
A) Zeige, dass in drei-, vier- oder fünfeckigen Museen jeweils nur ein Wärter nötig ist, um die gesamte Fläche zu überblicken.

B) Es sei n die Anzahl der Ecken des Randes von A. Zeige, dass dann nicht mehr als $\lfloor n/3 \rfloor$ Wärter gebraucht werden, die in den Ecken von A sitzen und die die gesamte Fläche einsehen können. Dabei bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die Zahl, auf die abgegrundet wird, wenn x keine ganze Zahl ist.

Hinweis: Zerlege A durch das Einfügen von Diagonalen geeignet in Dreiecksflächen, ohne neue Ecken hinzuzufügen. Dass das immer geht, darf vorausgesetzt werden.

Lösung zu Aufgabe 4. Obwohl die Drei-, Vier- oder Fünfecke nur einen Spezialfall der Aussage aus B) darstellen, werden wir beide Aussagen separat betrachten.

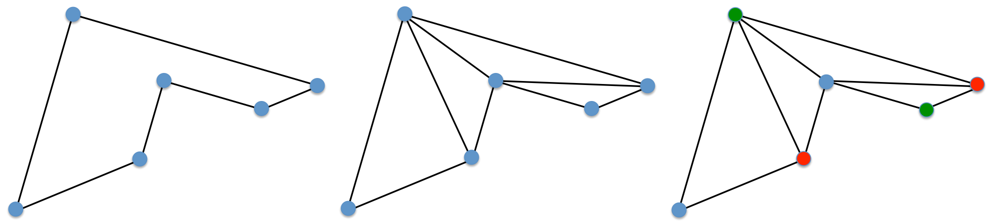
A) Für Dreiecke ist die Aussage unmittelbar einsichtig bzw. ebenso für alle konvexen Polygone (nach Definition von Konvexität). Vierecke können höchstens eine konkave Ecke haben, d.h. eine Ecke, deren Innenwinkel größer ist als 180°. Verbindet man die konkave Ecke eines Vierecks durch eine Diagonale mit der gegenüberliegenden Ecke verbinden, entstehen 2 Dreiecke, die von jedem Punkt der gemeinsamen Kante aus eingesehen werden können. Fünfecke haben eine Winkelsumme von 540° und haben somit maximal zwei konkave Ecken. Ist das Fünfeck konvex, gibt es nichts zu beweisen, das Fünfeck mit nur einer konkaven Ecke verhält sich ähnlich zum Viereck. Dass auch bei zwei konkaven Ecken ein Wärter ausreicht, sieht man, wenn man die beiden Ohren des Fünfecks abtrennt, indem man je eine konkave Ecke mit einer Diagonalen mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbindet (siehe Abbildung); dadurch erhält man eine disjunkte Zerlegung des Fünfecks in drei Dreiecke, die genau einen gemeinsamen Eckpunkt haben; ein Wärter in diesem Punkt kann alle drei Dreiecke einsehen (denn Dreiecke sind konvex), damit also das gesamte Fünfeck.



Beispiel: Fünfecke mit 0,1 oder 2 konkaven Ecken.

B) Man verfährt so wie unter a) und zerlegt das Polygon in Dreiecke, indem man sich nicht schneidende Diagonalen einfügt, ohne jedoch weitere Ecken hinzuzufügen; dadurch erhält man eine Zerlegung des n-Ecks in genau $n-2$ Dreiecke. Die Eckpunkte der Dreiecke werden nun mit Farben R, G, B eingefärbt, so dass jedes Dreieck Ecken in allen drei Farben hat (siehe unten). Wir bezeichnen mit n_B, n_G, n_B die Zahl der roten, grünen und blauen Ecken, wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $n_R \leq n_G \leq n_B$ ist; da $n_R + n_G + n_B = n$ ist, muss also insbesondere $n_R \leq \lfloor n/3 \rfloor$ gelten. Positioniert man nun Wärter in den rot eingefärbten Ecken, können sämtliche angrenzenden Dreiecke eingesehen werden und folglich die gesamte Fläche.

Färbbarkeit: Die 3-Färbbarkeit der Triangulierung (genauer: der Ecken der Triangulierung) soll zumindest ansatzweise gezeigt werden. Das geht z.B. wie folgt:



Beispiel: Triangulierung eines 6-Ecks durch 4 Dreiecke und deren 3-Färbung.

Angenommen, wir haben unser Polygon mit n Ecken bereits trianguliert, d.h., wir haben es in $n-2$ Dreiecke zerlegt. Dann gibt es nach dem Schubfachprinzip mindestens entweder zwei Dreiecke, die jeweils 2 Kanten mit dem Rand des Polygons gemeinsam haben, oder ein Dreieck, das sich 3 Kanten mit dem Polygon teilt; im zweiten Fall ist das Polygon selbst ein Dreieck, und es gibt nichts zu zeigen. Im ersten Fall lässt sich eine erlaubte Knotenfärbung konstruieren, indem man zuerst eines der Dreiecke mit 2 gemeinsamen Kanten einfärbt und dann jede weitere freie Ecke eines angrenzenden Dreiecks mit einer noch nicht vergebenen Farbe einfärbt. Da es bei überschneidungsfreien Polygonen keine inneren Ecken gibt und sich je zwei Dreiecke eine Kante teilen, können so die Ecken der Triangulierung vollständig eingefärbt werden, ohne dass Inkonsistenzen entstehen.